Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a VII-a – BAREMURI

Problema 1. Determinaţi numerele naturale r cu proprietatea că există numerele naturale prime p şi q astfel încât $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Soluţie. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $(p+q)^2 = r^2 + pq$, care devine $(p+q+r)(p+q-r) = pq$ . ... **2 p**
Cum divizorii numărului pq sunt $1, p, q$ şi pq, iar $p + q > \max\{p, q\}$, rezultă că $p + q - r = 1$ şi $p + q + r = pq$. .... **2 p**
Prin adunarea ultimelor două relaţii, obţinem $2p + 2q = pq + 1$, ... **1 p**
echivalent cu $(p-2)(q-2) = 3$ . ... **1 p**
Obţinem $(p, q) \in \{(3, 5), (5, 3)\}$. În fiecare caz, rezultă $r = 7$ . ... **1 p**

Problema 2. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $m(\angle BCD) = m(\angle ADC) \geq 90°$. Bisectoarele unghiurilor BAD şi ABC se intersectează în M. Demonstraţi că dacă $M \in CD$, atunci M este mijlocul lui $[CD]$.

Soluţie. **Cazul I.** Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, atunci punctul M este centrul cercului înscris în triunghiul ABE. .... **1 p**
Rezultă că semidreapta $(EM$ este bisectoarea unghiului AEB. .... **1 p**
Deoarece unghiurile ECD şi EDC sunt congruente, triunghiul EDC este isoscel cu baza $[DC]$ .... **1 p**
Prin urmare $[EM]$ este mediană a triunghiului EDC, deci punctul M este mijlocul segmentului CD. .... **1 p**

Cazul II. Dacă $AD \parallel BC$, atunci $m(\angle ADC) = m(\angle BCD) = 90°$, deci $m(\angle MAB) + m(\angle MBA) = 90°$, adică triunghiul MAB este dreptunghic în M. .... **1 p**
Fie N mijlocul segmentului AB. Rezultă că triunghiul NAM este isoscel cu baza $[AM]$, deci $\angle NMA \equiv \angle NAM \equiv \angle MAD$. .... **1 p**
Deoarece unghiurile $\angle NMA$ şi $\angle MAD$ sunt alterne interne, rezultă că dreptele MN şi AD sunt paralele. Astfel $\frac{MC}{MD} = \frac{NB}{NA} = 1$, adică M este mijlocul segmentului DC. .... **1 p**

Problema 3. Numerele x, y, z, t, a şi b sunt naturale şi nenule. Ştiind că $xt - yz = 1$ şi $\frac{x}{y} > \frac{a}{b} > \frac{z}{t}$, demonstraţi că $ab \geq (x+z)(y+t)$.

Soluţie. Din $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$ rezultă că $xb > ya$, deci $xb - ya \geq 1$. Analog se arată că $at - bz \geq 1$ .... **3 p**
Înmulţim prima inegalitate cu t, pe a doua cu y şi adunăm relaţiile obţinute; deducem că $bxt - byz \geq t + y$, adică $b \geq t + y$ .... **2 p**
La fel se demonstrează că $a \geq x + z$. Prin înmulţirea acestor inegalităţi rezultă cerinţa problemei. .... **2 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle ABC) = 60^\circ$. Punctele M şi D sunt situate pe laturile (AC) , respectiv (AB), astfel încât $m(\angle BCA) = 2m(\angle MBC)$ şi $BD = MC$. Determinaţi măsura unghiului $\angle DMB$.

Soluţie. Fie punctul G astfel încât $CG = CM$, $C \in (BG)$ şi $x = m(\sphericalangle MBC)$. Deoarece triunghiul MCG este isoscel, iar unghiul MCB este exterior acestui triunghi, rezultă că $m(\sphericalangle MGC) = x$. Înseamnă că şi triunghiul MBG este isoscel şi asemenea cu triunghiul MCG. Deducem că $\frac{BG}{MG} = \frac{MB}{MC} = \frac{MG}{BD}$. .... **3 p**
Fie H punctul în care mediatoarea segmentului BG intersectează dreapta AB. Rezultă că triunghiul HBG este isoscel şi, având un unghi de 60°, este echilateral. Prin urmare, $\frac{BG}{MG} = \frac{GH}{MB} = \frac{MG}{BD}$. .... **2 p**
Cum $m(\sphericalangle MGH) = m(\sphericalangle MBD) = 60^\circ - x$, rezultă că triunghiurile MGH şi DBM sunt asemenea, deci $m(\sphericalangle DMB) = m(\sphericalangle MHG) = 30^\circ$. ...... **2 p**